FISICA CUANTICA II

EXAMEN DE JUNIO, PROBLEMAS

CURSO 2021/2022 19 de Mayo de 2022

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado. Este examen cuenta un 75% de la nota.

1[4].- En el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$, una particula de espin 1/2 se mueve bajo la accion de un campo magnetico $\vec{B} = (B, 0, B)$. El hamiltoniano de la particula es:

$$H = -\hbar\mu\,\vec{B}\cdot\vec{\sigma} \;,$$

donde $\hbar\mu$ es el momento magnetico de la particula.

a) Obtengase el operador de evolucion temporal $U(t)$.

b) En el instante inicial $t = 0$ la particula esta en un estado en el que la componente z del espin vale $S_z = +\hbar/2$. Calculese la probabilidad de obtener $S_z = +\hbar/2$ y $S_z = -\hbar/2$ cuando se efectua una medida para $t > T$.

c)¿Cuales son las probabilidades de medir $S_x = +\hbar/2$ y $S_x = -\hbar/2$ despues de actuar el campo magnetico?.

2[3].-Considerese un sistema de dos niveles. Se prepara una mezcla estadistica con una probabilidad p_1 de estar en el estado $|\psi\rangle$ y una probabilidad $p_2 = 1 - p_1$ de estar en el estado $|\psi_\perp\rangle$, siendo $|\psi_\perp\rangle$ el estado ortogonal a $|\psi\rangle$ ($\langle\psi|\psi_\perp\rangle = 0$). En una base ortonormal el vector $|\psi\rangle$ se representa como:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;,$$

siendo a y b dos numeros complejos tales que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Obtengase la matriz densidad de la mezcla y las componentes del vector de Bloch en terminos de las componentes a y b de $|\psi\rangle$.

3[3].- Una particula de espin 1/2 se encuentra en un estado $|\psi\rangle$ tal que los valores medios de las componentes del operador de espin S_x y S_y son:

$$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{4} \;, \qquad \langle S_y\rangle = \frac{\hbar}{3} \;,$$

a) Determinense los estados $|\psi\rangle$ que satisfacen las condiciones anteriores, en la base en la cual la componente S_z del espin es diagonal.

b) En los estados obtenidos en el apartado a), obtengase los valores medios de S_z.

Problema 1

$$U(t) = e^{-i/\hbar\, Ht} = e^{i\mu B t(\sigma_x + \sigma_z)}$$

Definimos el vector unitario $\vec{n}$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U(t) = e^{i\sqrt{2}\mu B t\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma}}}$$

Aplicamos

$$e^{i\theta\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma} \qquad \text{con } \boxed{\theta = \sqrt{2}\mu B t}$$

$\Rightarrow$

$$U(t) = \cos[\sqrt{2}\mu B t] + i\,\text{sen}[\sqrt{2}\mu B t]\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma} =$$

$$= \cos[\sqrt{2}\mu B t] + i\,\text{sen}[\sqrt{2}\mu B t]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{U(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\mu B t) + \frac{i}{\sqrt{2}}\text{sen}(\sqrt{2}\mu B t) & \frac{i}{\sqrt{2}}\text{sen}(\sqrt{2}\mu B t) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\text{sen}(\sqrt{2}\mu B t) & \cos(\sqrt{2}\mu B t) - \frac{i}{\sqrt{2}}\text{sen}(\sqrt{2}\mu B t) \end{pmatrix}}$$

b) $\quad |\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+z\rangle \quad \Rightarrow$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = U(t)|+z\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\mu B t) + \frac{i}{\sqrt{2}}\text{sen}(\sqrt{2}\mu B t) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\text{sen}(\sqrt{2}\mu B t) \end{pmatrix}}$$

Comprobemos que $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1$

$$\langle \psi(t)| = \left(\cos(\sqrt{2}\mu B t) - \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\mu B t) , -\frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\mu B t) \right)$$

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \cos^2(\ldots) + \underbrace{\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(\ldots) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(\ldots)}_{\operatorname{sen}^2(\ldots)} =$$

$$= \cos^2(\ldots) + \operatorname{sen}^2(\ldots) = 1 \longrightarrow \underline{\text{OK}}$$

Calculemos las amplitudes de transicion

$$|+z\rangle \longrightarrow |+z\rangle \qquad\qquad |+z\rangle \longrightarrow |-z\rangle$$

$$\langle +z | \psi(t) \rangle = (1,0)\, U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\sqrt{2}\mu B t) + \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\mu \sqrt{2} B t)$$

$$\langle -z | \psi(t) \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\mu B t)$$

Las probabilidades pedidas son:

$$\boxed{P_{+z}(T) = |\langle +z | \psi(T) \rangle|^2} \qquad \boxed{P_{-z}(T) = |\langle -z | \psi(T) \rangle|^2}$$

$$P_{+z}(T) = \cos^2(\sqrt{2}\mu B t) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\hookrightarrow 1 - 1/2} \operatorname{sen}^2(\sqrt{2}\mu B t) =$$

$$= \underbrace{\cos^2(\ldots) + \operatorname{sen}^2(\ldots)}_{1} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(\ldots)$$

$$\boxed{P_{+z}(T) = 1 - \frac{1}{2}\,\text{sen}^2(\sqrt{2}\,\mu BT)}$$

$$\boxed{P_{-z}(T) = \frac{1}{2}\,\text{sen}^2(\sqrt{2}\,\mu BT)}$$

c) Tenemos que calcular las probabilidades de las transiciones

$$|+z\rangle \longrightarrow |+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$|+z\rangle \longrightarrow |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Las amplitudes son

$$\langle +x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\,U\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(\sqrt{2}\,\mu Bt) + i\sqrt{2}\,\text{sen}(\sqrt{2}\,\mu Bt)\right]$$

Tomando $t = T \Rightarrow$

$$\boxed{\langle +x|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}\,\mu BT) + i\,\text{sen}(\sqrt{2}\,\mu BT)}$$

De forma similar

$$\boxed{\langle -x|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}\,\mu BT)}$$

Las probabilidades pedidas son:

$$P_{+x}(T) = |\langle +x | \psi(T) \rangle|^2$$

$$P_{-x}(T) = |\langle -x | \psi(T) \rangle|^2$$

$$P_{+x}(T) = \frac{1}{2}\cos^2(\cdots) + \underbrace{\operatorname{sen}^2(\cdots)}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(\cdots)$$

$$\boxed{P_{+x}(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(\sqrt{2}\mu BT)}$$

$$\boxed{P_{-x}(T) = \frac{1}{2}\cos^2(\sqrt{2}\mu BT)}$$

Considerese un sistema de dos niveles. Se prepara una mezcla estadistica con una probabilidad P_1 de estar en el estado $|\psi\rangle$ y una probabilidad $P_2 = 1 - P_1$ de estar en el estado $|\psi_\perp\rangle$, siendo $|\psi_\perp\rangle$ el estado ortogonal a $|\psi\rangle$ ($\langle\psi|\psi_\perp\rangle = 0$). En una base ortonormal el vector $|\psi\rangle$ se representa como

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{C} \quad , \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Obtengase la matriz densidad de la mezcla y las componentes del vector de Bloch en terminos de las componentes a y b de $|\psi\rangle$

Solucion

$$\rho = P_1 |\psi\rangle\langle\psi| + (1-P_1)|\psi_\perp\rangle\langle\psi_\perp|$$

Pero

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(a^*, b^*) = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}$$

Como $\quad |\psi_\perp\rangle = \begin{pmatrix} -b^* \\ a^* \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$

$$|\psi_\perp\rangle\langle\psi_\perp| = \begin{pmatrix} -b^* \\ a^* \end{pmatrix}(-b, a) = \begin{pmatrix} |b|^2 & -ab^* \\ -a^*b & |a|^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\rho = \begin{pmatrix} P_1|a|^2 + (1-P_1)|b|^2 & P_1 ab^* - (1-P_1)ab^* \\ P_1 a^*b - (1-P_1)a^*b & P_1|b|^2 + (1-P_1)|a|^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_1(|a|^2 - |b|^2) + |b|^2 & (2P_1 - 1)ab^* \\ (2P_1-1)a^*b & P_1(|b|^2 - |a|^2) + |a|^2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{11} = P_1 |a|^2 + (1-P_1)(1-|a|^2) = 1 - P_1 + (2P_1 - 1)|a|^2$$

$$\rho_{22} = P_1(1-|a|^2) + (1-P_1)|a|^2 = P_1 + (1-2P_1)|a|^2$$

$$\rho_{12} = (2P_1 - 1)\, ab^* = (2P_1-1)\,\mathrm{Re}(ab^*) + i(2P_1-1)\,\mathrm{Im}(ab^*)$$

$$\rho_{21} = \rho_{12}^* = (2P_1-1)\,\mathrm{Re}(ab^*) - i(2P_1-1)\,\mathrm{Im}(ab^*)$$

Vector de Bloch $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\left.\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{2} + \frac{b_z}{2} \\ \rho_{22} &= 1/2 - \frac{b_z}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_z = \rho_{11} - \rho_{22} \Rightarrow$$

$$b_z = 1 - P_1 + (2P_1 - 1)|a|^2 - P_1 + (2P_1-1)|a|^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{b_z = (2P_1 - 1)(2|a|^2 - 1)}$$

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} b_x - \frac{i}{2} b_y \rightarrow \begin{aligned} b_x &= 2\,\mathrm{Re}(\rho_{12}) \\ b_y &= -2i\,\mathrm{Im}(\rho_{12}) \end{aligned}$$

$$\boxed{b_x = 2(2P_1 - 1)\,\mathrm{Re}(ab^*)} \quad \boxed{b_y = -2(2P_1-1)\,\mathrm{Im}(ab^*)}$$

$$\Rightarrow \vec{b}^2 = 4(2P_1-1)^2 \underbrace{\left[(\mathrm{Re}(ab^*))^2 + (\mathrm{Im}(ab^*))^2\right]}_{|ab^*|^2 = |a|^2|b|^2 = |a|^2(1-|a|^2)} + (2P_1-1)^2(2|a|^2-1)^2 =$$

$$= (2P_1-1)^2\left[\cancel{4|a|^2} - \cancel{4|a|^4} + \cancel{4|a|^4} - \cancel{4|a|^2} + 1\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{b}^2 = (2P_1 - 1)^2} \rightarrow \text{Estado puro si } P_1 = 1,\ P_1 = 0$$

Una partícula de espín $\frac{1}{2}$ se encuentra en un estado $|\psi\rangle$ tal que los valores medios de S_x y S_y son

$$\langle S_x \rangle_\psi = \hbar/4 \qquad \langle S_y \rangle_\psi = \hbar/3$$

a) Determínense los posibles estados $|\psi\rangle$ en la base en la componente S_z del espín es diagonal

b) Para los estados obtenidos en el apartado a), obténganse los valores medios de S_z

---

a) Sean $|\pm\rangle$ los autovectores de S_z $\left(S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle \right)$. Pongamos

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Entonces

$$\langle S_x \rangle_\psi = \frac{\hbar}{2}(a^*, b^*)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}(a^* b + a b^*)$$

$$\langle S_y \rangle_\psi = \frac{\hbar}{2}(a^*, b)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -i\frac{\hbar}{2}(a^* b - a b^*)$$

$$\boxed{\langle S_x \rangle_\psi = \hbar \, R_e(a^* b)} \qquad \boxed{\langle S_z \rangle_\psi = \hbar \, I_m(a^* b)}$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Entonces

$$a^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{1-a^2}\, e^{i\theta}}$$

$$\langle S_x \rangle_\psi = \hbar a \, \mathrm{Re}(b) = \hbar a \sqrt{1-a^2} \cos\theta$$

$$\langle S_y \rangle_\psi = \hbar a \, \mathrm{Im}(b) = \hbar a \sqrt{1-a^2} \,\mathrm{sen}\,\theta$$

Utilizando los valores de $\langle S_x \rangle_\psi$ y $\langle S_y \rangle_\psi$ del enunciado

$$\boxed{a\sqrt{1-a^2} \cos\theta = 1/4} \quad (1)$$

$$\boxed{a\sqrt{1-a^2} \,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{3}} \quad (2)$$

Haciendo (2)/(1)

$$\tan\theta = \frac{1/3}{1/4} = 4/3 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1/3}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}}$$

Como

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16+9}}{3 \cdot 4} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1/3}{5/12} = 4/5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1/4}{\sqrt{(1/3)^2 + (1/4)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{3}{5}}$$

Substituimos el valor de $\cos\theta$ en $1/2$ $\Rightarrow$

$$a\sqrt{1-a^2}\,\frac{3}{5}=\frac{1}{4} \Rightarrow a\sqrt{1-a^2}=\frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$a^2(1-a^2)=\frac{25}{(12)^2} \Rightarrow a^4-a^2+\frac{25}{(12)^2}=0$$

$\Rightarrow$ Hay dos soluciones

$$a_\pm^2=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4\frac{25}{(12)^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-25/36}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\sqrt{36-25}}{6}\right) \Rightarrow \boxed{a_\pm^2=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\sqrt{11}}{6}\right)}$$

$$b_\pm^2=(1-a_\pm^2)\,e^{2i\theta} \Rightarrow |b_\pm|^2=1-a_\pm^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{|b_\pm|^2=\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{\sqrt{11}}{6}\right)}$$

El estado $|\psi\rangle$ es

$$\boxed{|\psi\rangle_\pm=a_\pm|+\rangle+|b_\pm|\,e^{i\theta}|-\rangle}$$

$$a_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1\pm\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^{1/2}$$

$$|b_\pm|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1\mp\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^{1/2}$$

$$\theta=\arcsin(4/5)$$

b) Como

$$\langle S_z \rangle_{\psi_\pm} = \frac{\hbar}{2}\left[a_\pm^2 - |b_\pm|^2\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[a_\pm^2 - (1 - a_\pm^2)\right] \Rightarrow$$

$$\langle S_z \rangle_{\psi_\pm} = \frac{\hbar}{2}\left[2a_\pm^2 - 1\right]$$

$$2a_\pm^2 - 1 = \cancel{1} \pm \frac{\sqrt{11}}{6} - \cancel{1} = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle S_z \rangle_{\psi_\pm} = \pm \frac{\sqrt{11}}{12}\hbar}$$